

Dinamica del Corpo rigido

Definizione Un corpo rigido è *un sistema di punti materiali in cui le distanze relative NON cambiano* ed è un **oggetto esteso**.

Le **forze interne** (forze di coesione che mantengono **invariate le distanze fra i punti**) hanno le seguenti caratteristiche:

hanno risultante nulla $\mathbf{R}^{(I)} = 0$ hanno momento risultante nullo $\mathbf{M}^{(I)} = 0$

Il lavoro totale è nullo $\mathbf{W}^{(I)} = 0$

Le **forze esterne** sono responsabili del moto del **Centro di Massa**

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{(E)} = m\mathbf{a}_{CM}$$

I momenti delle forze esterne sono responsabili delle rotazioni intorno ad O

$$\mathbf{M}_O^{(E)} = \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$$

Il **lavoro delle forze esterne** varia l'**energia cinetica** del sistema

$$W^{(E)}(A \rightarrow B) = E_{k,B} - E_{k,A}$$

Dal sistema di punti al Corpo rigido

un corpo rigido è formato da un **insieme continuo di punti materiali**.

Per estendere ciò che si è visto per un sistema di punti al corpo rigido bisogna passare dalle singole masse **all'elemento infinitesimo**, considerare la **densità ρ** e passare dalle **somme agli integrali**

$$m_i \Rightarrow dm$$

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

$$m = \int dm = \int_V \rho dV$$

Se la densità è costante \rightarrow

$$\rho = \frac{m}{V}; \quad m = \rho V$$

Si possono anche definire le **densità superficiali e lineari** (usate ad esempio per lastra sottile di metallo e per filo di acciaio)

la densità si misura in **Kg/m³** la superficiale in **Kg/m²** La lineare **Kg/m**, **ρ** acqua **10³**

$$\rho_s = \frac{dm}{dS} \Rightarrow m = \int_S \rho_s dS$$
$$\rho_l = \frac{dm}{dl} \Rightarrow m = \int_l \rho_l dl,$$

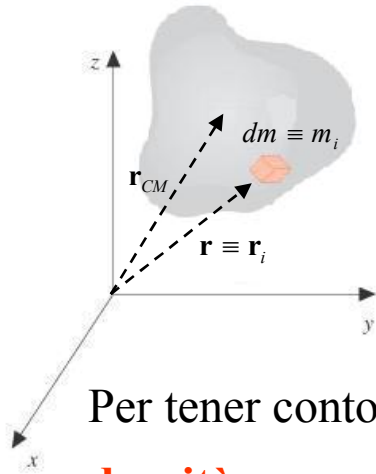
TABELLA 7.1 Densità di alcune sostanze

| | | | |
|-------------------------|----------------------------------|-----------------|----------------------------------|
| berillio | $1.85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ | ioduro di sodio | $3.67 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ |
| carbonio (grafite pura) | 2.27 | vetro comune | $2.4 \div 2.8$ |
| alluminio | 2.70 | vetro Pyrex | 2.23 |
| silicio | 2.33 | quarzo | 2.64 |
| ferro | 7.87 | plexiglas | 1.18 |
| rame | 8.96 | ghiaccio | 0.92 |
| argento | 10.5 | legno (quercia) | $0.6 \div 0.9$ |
| oro | 19.3 | cemento armato | $2.4 \div 2.5$ |
| tungsteno | 19.35 | (mercurio | 13.59) |
| platino | 21.45 | (acqua a 4°C | 1.00) |
| piombo | 11.35 | | |

| | $R(\text{m})$ | $V(\text{m}^3)$ | $m \text{ (kg)}$ | $\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$ |
|------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|--------------------------------|
| terra | $6.37 \cdot 10^6$ | $1.08 \cdot 10^{21}$ | $5.98 \cdot 10^{24}$ | $5.54 \cdot 10^3$ |
| sole | $6.96 \cdot 10^8$ | $1.41 \cdot 10^{27}$ | $1.98 \cdot 10^{30}$ | $1.40 \cdot 10^3$ |
| sole collassato | 880 | $2.85 \cdot 10^3$ | $1.98 \cdot 10^{30}$ | $6.95 \cdot 10^{29}$ |
| nucleo del ferro | $5.60 \cdot 10^{-15}$ | $7.36 \cdot 10^{-45}$ | $9.27 \cdot 10^{-28}$ | $1.26 \cdot 10^{17}$ |

Centro di massa di un corpo rigido

Centro di massa di un sistema di punti materiali: $\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$



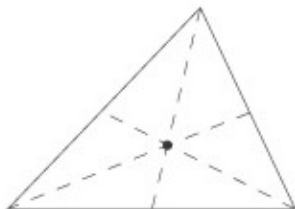
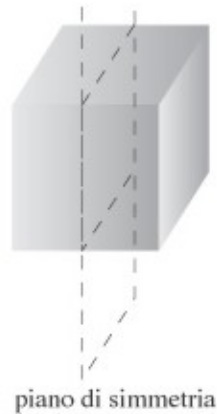
Per un corpo rigido, cioè continuo: $\mathbf{r}_{CM} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{m}$

Per tener conto di come la massa è distribuita all'interno del corpo si utilizza la grandezza **densità**: $\rho = \frac{dm}{dV}$ dove dV è l'elemento di volume infinitesimo occupato da dm

Tramite il concetto di densità \mathbf{r}_{CM} può essere definito come: $\mathbf{r}_{CM} = \frac{\int \mathbf{r} \rho dV}{m}$

Se ρ è costante: $\mathbf{r}_{CM} = \frac{\int \mathbf{r} \rho dV}{m} = \frac{\rho}{m} \int \mathbf{r} dV = \frac{1}{V} \int \mathbf{r} dV$

Posizione del centro di massa



Se ρ è costante:

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{r} dV$$



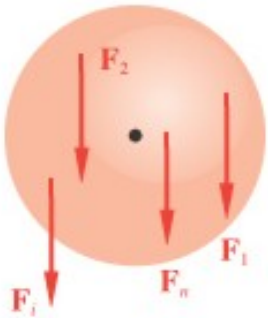
Se **la densità è costante**, la posizione del centro di massa, data da \mathbf{r}_{CM} , è la media della funzione vettoriale $\mathbf{r}(x,y,z)$ nel volume V .

Non **dipende** dalla **massa** ma **solo dalla sua forma**

Se un corpo è **simmetrico** rispetto ad un punto, un asse o un piano, il centro di massa coincide con il centro di simmetria o è un punto dell'asse o del piano di simmetria

Se esistono più assi e piani di simmetria, il centro di massa è posizionato sulla loro intersezione

Forza peso e centro di massa

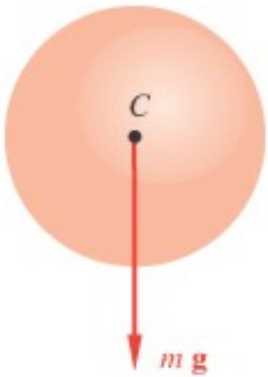


Ho corpo continuo sottoposto alla forza peso. Su ciascun elemento agisce la forza gdm .

$$dF \rightarrow gdm$$

La risultante di tutte queste forze parallele fra di loro è F ed è applicata nel CM :

$$F = \int gdm = g \int dm = mg$$



Il momento della forza peso rispetto a un polo fisso (ad esempio l'origine dell'asse delle coordinate) è dato da:

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{g} dm = \left(\int \mathbf{r} dm \right) \times \mathbf{g} \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}_{CM} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm} \Rightarrow \int \mathbf{r} dm = \mathbf{r}_{CM} \int dm$$

$$\mathbf{M} = \left(\mathbf{r}_{CM} \int dm \right) \times \mathbf{g} = m \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{g} = \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{g}$$



$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{g}$$

Energia potenziale e Centro di massa

Analogamente a quanto visto in precedenza per il calcolo dell'energia potenziale per la forza peso si deve integrare dE_p :

$$E_p = \int gz dm = g \int z dm$$

ma:

$$z_{CM} = \frac{\int z dm}{\int dm} \Rightarrow \int z dm = z_{CM} \int dm$$



$$E_p = \int gz dm = g \int z dm = g z_{CM} \int dm = m g z_{CM}$$



$$E_p = m g z_{CM}$$

Se il corpo è libero ed agisce solo la forza peso la traiettoria del CM è verticale rettilinea o parabolica a seconda delle condizioni iniziali.

Moto di un corpo rigido

Per studiare il moto di un corpo rigido è possibile concentrarsi sullo **spostamento globale**, naturalmente riconducibile al **moto del centro di massa**.

Tuttavia i vari punti del corpo rigido possono descrivere traiettorie diverse tra loro e da quella del centro di massa.



Prima di arrivare a considerare il moto più generale di un corpo rigido, iniziamo ad analizzare due tipi di moto:

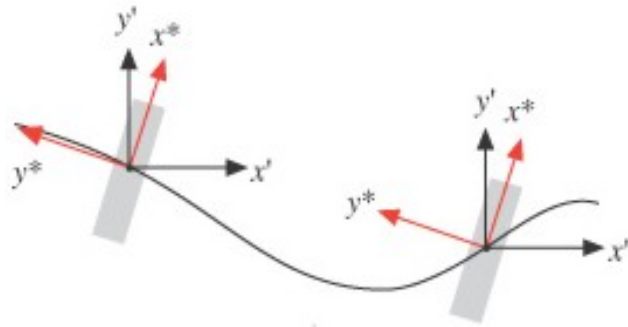
- **Moto di traslazione** del corpo rigido
- **Moto di rotazione** del corpo rigido

Moto di traslazione e il moto di rotazione sono gli unici tipi di moto da studiare perché si dimostra che il moto più generale di un corpo rigido è un ***moto di rototraslazione***

Moto di un corpo rigido

Traslazione

Quando il corpo rigido compie un moto di sola traslazione **tutti i punti descrivono traiettorie uguali**, in generale curvilinee, percorse **con la stessa velocità \mathbf{v} , che coincide con \mathbf{v}_{CM}** .



Le grandezze significative in una traslazione sono:

Quantità di moto:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}_{CM}$$

Energia cinetica

$$E_k = E_{k,CM} = \frac{1}{2}mv_{CM}^2$$

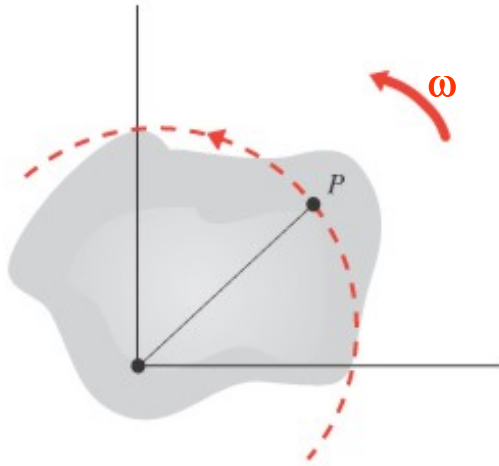
Con \mathbf{R} : risultante delle forze esterne

L'equazione dinamica alla base del moto di traslazione è: $\mathbf{R} = m\mathbf{a}_{CM}$

Il momento angolare: $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times m\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P}$

Moto di un corpo rigido

Rotazione



Quando il corpo rigido compie un moto di rotazione *tutti i punti descrivono un moto circolare*, le traiettorie sono archi di circonferenze diverse che stanno su piani tra loro paralleli e *hanno il centro su uno stesso asse, l'asse di rotazione*

Tutti i punti ruotano con la **stessa** velocità angolare ω . Le velocità v_i dei singoli punti sono **diverse** a seconda della distanza R_i dall'asse di rotazione

$$v_i = \omega R_i$$

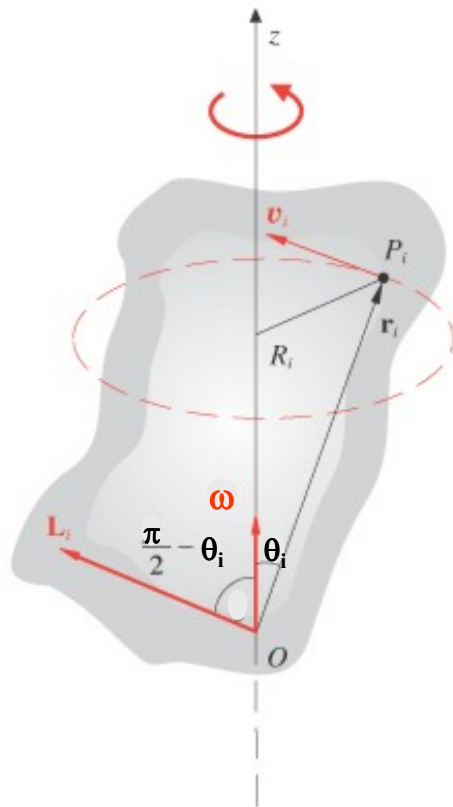
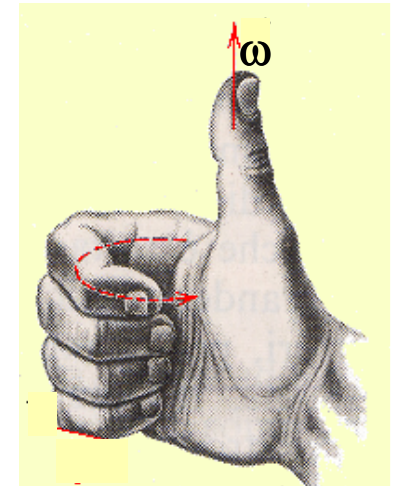
L'equazione dinamica alla base del moto è: $\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$

Rotazioni intorno ad un asse fisso

I punti dell'**asse** attorno cui avviene la rotazione sono fissi e dunque possono essere utilizzati come **poli per il calcolo dei momenti**.

Caratteristiche del vettore velocità angolare ω :

- **direzione** è quella dell'asse di rotazione ed è fissa
- **verso** indica il verso della rotazione
- **modulo** in genere variabile



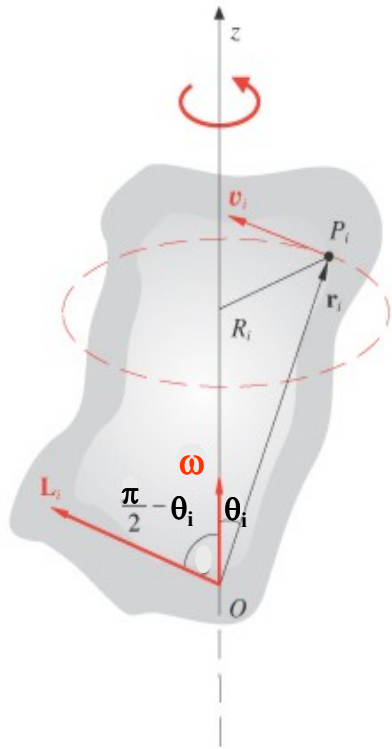
Se ω varia allora il vettore accelerazione angolare $\alpha \neq 0$ $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

α è anch'esso parallelo all'asse di rotazione

Assumiamo, come in figura:

- l'asse **z** come **asse di rotazione**
- il punto **O**, qualsiasi punto sull'asse **z**, come **polo** per il calcolo dei momenti

Rotazioni intorno ad un asse fisso



Angolo tra il raggio vettore \mathbf{r}_i e l'asse z : θ_i

Angolo tra il raggio vettore \mathbf{r}_i e \mathbf{v}_i : $\pi/2$

Distanza di P_i dall'asse: $\mathbf{R}_i = \mathbf{r}_i \sin \theta_i$

Momento angolare del punto P_i rispetto ad O : $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$

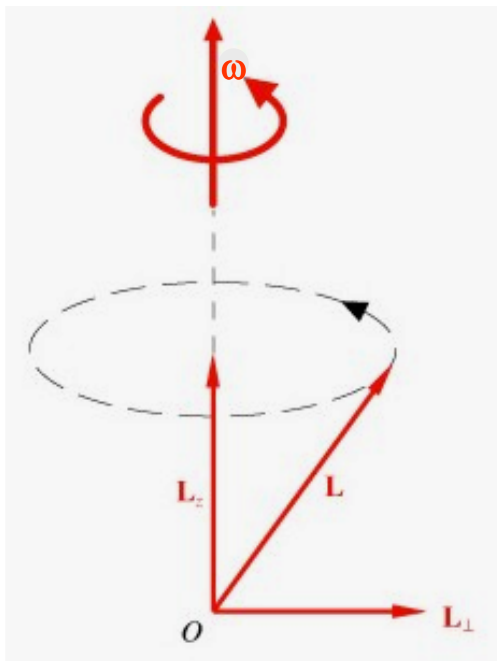
- risulta:
- Ortogonale al piano individuato dai vettore \mathbf{r}_i e \mathbf{v}_i : $\mathbf{L}_i \perp \mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i$
 - Forma un angolo pari a $\pi/2 - \theta_i$ con l'asse z
 - Ha modulo pari a: $L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i R_i \omega$

Proiezione del momento angolare L_i sull'asse di rotazione:

Momento angolare assiale $L_{i,z}$:

$$L_{i,z} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = L_i \sin \theta_i = m_i R_i \omega r_i \sin \theta_i = m_i R_i^2 \omega$$

$\boxed{= R_i}$



Momento di inerzia

Momento angolare totale del corpo $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i$

Proiezione sull'asse z: $L_z = \sum_i L_{i,z} = \sum_i (m_i R_i^2) \omega$

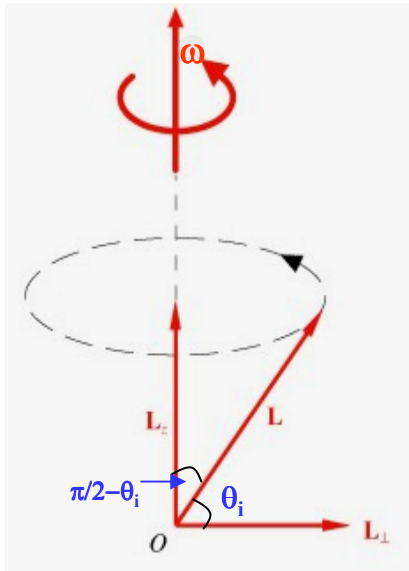
Se definiamo il **momento di inerzia del corpo rispetto all'asse**, la grandezza:

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2$$

$$L_z = \sum_i (m_i R_i^2) \omega \quad \Downarrow \quad \Rightarrow \quad L_z = I_z \omega$$

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Il momento di inerzia dipende dalle **masse** e dalla **loro posizione** rispetto all'asse di rotazione.
Dipende dalla **forma del corpo** e dalla **posizione dell'asse rispetto al corpo**



Momento angolare

se l'asse di simmetria coincide con l'asse di rotazione

Abbiamo ricavato che:

✓ Momento angolare totale del corpo

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i$$

✓ Componente del momento angolare // z

$$L_z = I_z \omega$$

La **componente ortogonale** del momento angolare in generale non è nulla ma è data dalla **somma** vettoriale dei termini:

$$L_{i,\perp} = L_i \cos(\theta_i) = m_i r_i R_i \omega \cos \theta_i$$

Se l'asse di rotazione coincide con un asse di simmetria del corpo

L_{\perp} è nullo, poiché per ogni \mathbf{L}_i esiste un \mathbf{L}_j simmetrico rispetto all'asse.

$$L_{\perp} = 0$$

$$\mathbf{L} = L_{//}$$

$$\mathbf{L} = I_z \omega$$

L è parallelo a ω

Nel caso generale in cui $L_{\perp} \neq 0$

Si ha un moto intorno all'asse di rotazione detto

Moto di precessione (trottola)

Equazioni del moto del corpo rigido

Caso 1: \mathbf{L} è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega}$$



$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = I_z \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I_z \boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} = I_z \boldsymbol{\alpha}$$

Questa è *l'equazione del moto di rotazione*

$\boldsymbol{\alpha}$ e \mathbf{M} sono paralleli all'asse di rotazione cioè a $\boldsymbol{\omega}$

La conoscenza delle forze esterne e del loro punto di applicazione permette di calcolare l'accelerazione angolare, se è noto il momento di inerzia.

Equazioni del moto del corpo rigido

Caso 1: \mathbf{L} è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$

Le relazioni tramite cui si può ricavare la legge oraria sono:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{M}}{I_z}$$

$$\omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha dt$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega dt$$

Se $\mathbf{M}=0$, il corpo resta in quiete o si muove di **moto circolare uniforme**

$$\mathbf{M}=0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\omega = \omega_0$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t$$

Se $\mathbf{M}=\text{costante}$, il corpo si muove di **moto circolare uniformemente accelerato**

$$\alpha = \text{costante}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

Se \mathbf{M} è generico

$$\alpha = \alpha(t)$$

Il moto è **circolare vario**

Equazioni del moto del corpo rigido

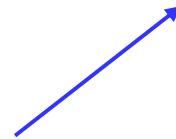
Caso 2: \mathbf{L} non è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$

$$L_z = I_z \omega$$



$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha$$

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} \Rightarrow M_z = I_z \alpha$$



Da questa si ricava *la legge oraria con le stesse formule prima descritte*
 α non dipende dalla componente perpendicolare L_{\perp} ma solo da L_z

$$M_{\perp} = \frac{dL_{\perp}}{dt}$$

Dalla componente perpendicolare si ricavano informazioni sul moto di precessione che non influisce sull'andamento di α

Calcolo dell'energia cinetica

L'energia cinetica del corpo rigido in un moto di rotazione è data da:

$$E_{\text{cin}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \Rightarrow \boxed{I_z = \sum_i m_i R_i^2}$$

L'energia cinetica dipende dal momento di inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione

Nel caso in cui \mathbf{L} è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$ $\mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{cin}} = \frac{L^2}{2I_z}$

Nel caso in cui \mathbf{L} non è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$ $L_z = I_z \omega \quad \Rightarrow \quad E_{\text{cin}} = \frac{L_z^2}{2I_z}$

Calcolo del lavoro

Quando un corpo con velocità angolare iniziale ω_{in} viene portato a ruotare con velocità angolare ω_{fin} , in seguito all'applicazione di un **momento esterno**, l'energia cinetica subisce una variazione ed è dunque stato compiuto un **lavoro**

$$W = \Delta E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} I_z \omega_{\text{fin}}^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_{\text{in}}^2$$

In forma infinitesima si ha:

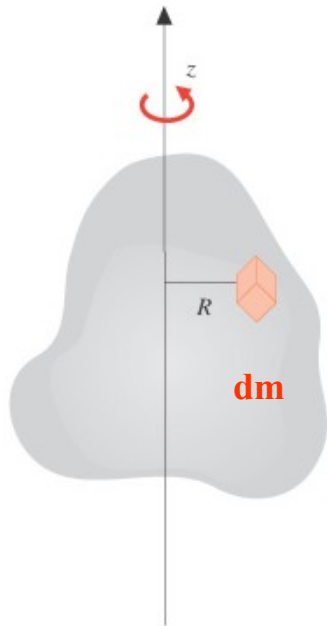
$$dW = dE_{\text{cin}} \implies d\left(\frac{1}{2} I_z \omega^2\right) = I_z \omega d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha dt = I_z \alpha d\theta = M_z d\theta$$

$$dW = M_z d\theta \quad W = \int_0^{\theta} M_z d\theta$$

NOTA: Nel caso in cui **L** è parallelo a ω $W = \int_0^{\theta} M d\theta$

Relazione tra momento e lavoro

$$\text{Potenza istantanea: } \frac{dW}{dt} = M_z \frac{d\theta}{dt} = M_z \omega$$



Momento di inerzia dal discreto al continuo

$$I = \sum_i r_i^2 m_i \quad \text{Nel caso discreto}$$

Il momento di inerzia per un corpo continuo è dato da:

$$I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV = \int \rho (x^2 + y^2) dV$$

Significato del Momento di inerzia

Nelle rotazioni rigide *il momento di inerzia ha un ruolo fondamentale*, analogo a quello della massa nella legge di Newton:

$$\mathbf{M} = I_z \boldsymbol{\alpha}$$

A parità di momento applicato un corpo assume *un'accelerazione angolare maggiore o minore a seconda del valore del momento di inerzia* rispetto all'asse di rotazione

NOTA: Differenza fondamentale tra massa e momento di inerzia:

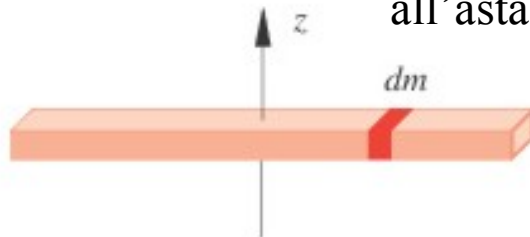
- **m**: caratteristica che può essere associata ad ogni corpo
- **I**: dipende da come è distribuita la massa attorno all'asse di rotazione

“Corrispondenza formale” tra il moto rettilineo e quello circolare

| Moto rettilineo | | Moto circolare | |
|-----------------|--------------------------------------|-----------------|---|
| 1. Spostamento | \vec{r} | 1. Spostamento | ϑ |
| 2. Velocità | $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ | 2. Velocità | $\vec{\omega} = \frac{d\vartheta}{dt} \hat{k}$ |
| 3. Accel. | $\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ | 3. Accel. | $\vec{\alpha} = \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} \hat{k}$ |
| 4. Massa | m | 4. Mom Inerzia | I |
| 5. Forza | $\vec{F} = m \vec{a}$ | 5. Mom.Forza | $\vec{M} = I \vec{\alpha}$ |
| 6. Lavoro | $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$ | 6. Lavoro | $W = \int M_z \cdot d\vartheta$ |
| 7. En. Cin. | $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ | 7. En. Cin. | $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$ |
| 8. Potenza | $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ | 8. Potenza | $P = M_z \cdot \omega$ |
| 9. Q. di moto | $Q = m \vec{v}$ | 9. Mom.Angolare | $\vec{L} = I \vec{\omega}$ |

Esercizio - Calcolo del momento di inerzia

Determinare il **Momento di inerzia** rispetto ad un asse ortogonale all'asta e passante per il centro **di una sottile asta omogenea**:



- Massa: m
- Lunghezza: d
- Sezione: S

$$m = \rho S d \quad \Rightarrow \quad dm = \rho S dx$$

Elemento di massa dm , di dimensioni dx che si trova alla distanza x dall'asse

$$I_z = \int_{-d/2}^{d/2} x^2 dm = \rho S \int_{-d/2}^{d/2} x^2 dx = \frac{1}{12} \rho S d^3 \quad \Rightarrow$$

$$I_z = \frac{1}{12} m d^2$$

Momento di inerzia di una asta omogenea rispetto asse ortogonale passante per il centro

Se l'asse passa per un estremo dell'asta:

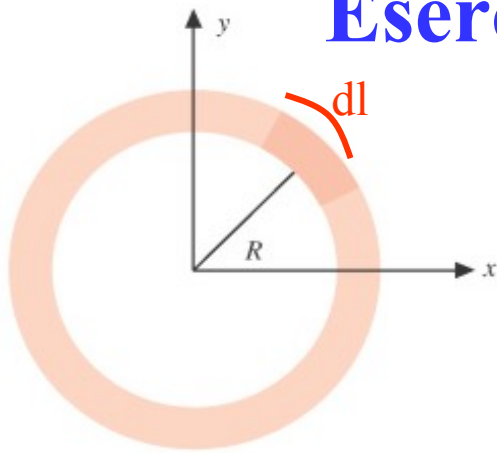
$$I_z = \int_0^d x^2 dm = \rho S \int_0^d x^2 dx = \frac{1}{3} \rho S d^3$$



$$I_z = \frac{1}{3} m d^2$$

Momento di inerzia di una asta omogenea rispetto ad un asse ortogonale passante per un estremo

Esercizio - Calcolo del momento di inerzia



Determinare il **momento di inerzia di un anello omogeneo** (2 dimensioni) rispetto ad un asse passante per il centro dell'anello e ortogonale al piano dell'anello:

- Massa: m
- Raggio: R

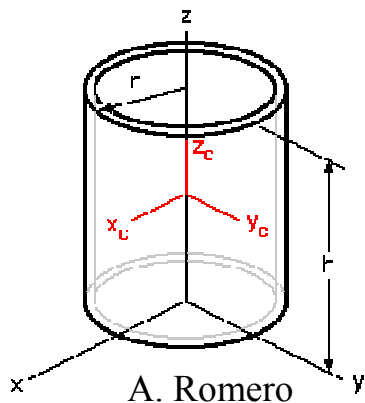
$$m = \rho_l 2\pi R \Rightarrow dm = \rho_l dl$$

massa dm che si trova nell'arco dl , con ρ_l : densità lineare

$$I_z = \int R^2 dm = \int \rho_l R^2 dl = \rho_l R^2 \int dl = \rho_l R^2 2\pi R \Rightarrow$$

$$I_z = mR^2$$

Momento di inerzia anello omogeneo



Momento di inerzia di un guscio cilindrico

Un guscio cilindrico sottile si può considerare come un insieme di anelli sovrapposti, chiamando m_i la massa degli anelli e m la massa totale:

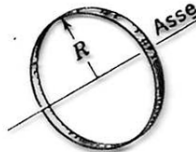
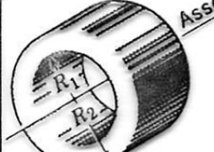
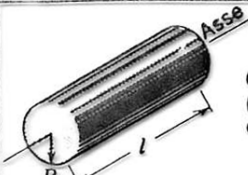
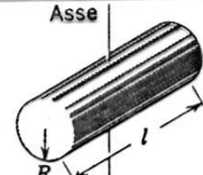
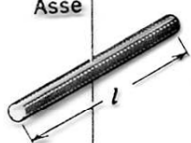
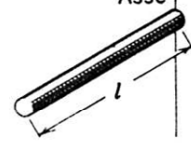
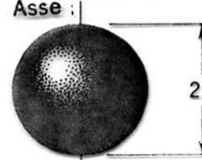
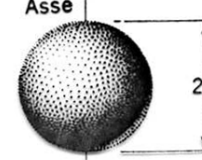
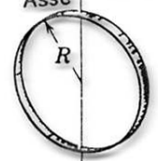
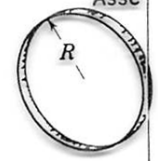
$$I_z = \sum_i m_i R^2$$



$$I = mR^2$$

Alcuni momenti di inerzia

Trovare I di cilindro pieno

| | |
|--|---|
|  <p>Anello (rispetto all'asse del cilindro)</p> $I = MR^2$ <p>a</p> |  <p>Cilindro cavo (rispetto all'asse del cilindro)</p> $I = \frac{M}{2} (R_1^2 + R_2^2)$ <p>b</p> |
|  <p>Cilindro pieno (rispetto all'asse del cilindro)</p> $I = \frac{MR^2}{2}$ <p>c</p> |  <p>Cilindro pieno o disco (rispetto ad un diametro centrale)</p> $I = \frac{MR^2}{4} + \frac{Ml^2}{12}$ <p>d</p> |
|  <p>Sbarra sottile (rispetto ad un asse per il centro \perp alla lunghezza)</p> $I = \frac{Ml^2}{12}$ <p>e</p> |  <p>Sbarra sottile (rispetto ad un asse passante per un estremo \perp alla lunghezza)</p> $I = \frac{Ml^2}{3}$ <p>f</p> |
|  <p>Sfera piena (rispetto a un diametro qualunque)</p> $I = \frac{2MR^2}{5}$ <p>g</p> |  <p>Superficie sferica (rispetto ad un diametro qualunque)</p> $I = \frac{2MR^2}{3}$ <p>h</p> |
|  <p>Anello (rispetto ad un diametro qualunque)</p> $I = \frac{MR^2}{2}$ <p>i</p> |  <p>Anello (rispetto ad un qualunque asse tangente)</p> $I = \frac{3MR^2}{2}$ <p>j</p> |

Raggio giratore

Il tutte le formule trovate il momento di inerzia ha un'espressione del tipo:

$$I = fmd^2$$

Dove:

- **f**: fattore numerico legato alla struttura del sistema
(*forma corpo, posizione asse di rotazione*)
- **m**: massa del corpo
- **d**: dimensione significativa

Quindi il momento di inerzia si può scrivere come: $I = mk^2$

$$\text{Con: } k = \sqrt{fd} = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

k è detto *raggio giratore del corpo*

Significato del raggio giratore:

Dato un corpo di momento d'inerzia I rispetto ad un asse. Immaginiamo di concentrare tutta la sua massa in un punto. ***k rappresenta la distanza dall'asse a cui bisogna porre questo punto per avere lo stesso momento di inerzia I .*** E' utilizzato per scrivere formule in modo più generale

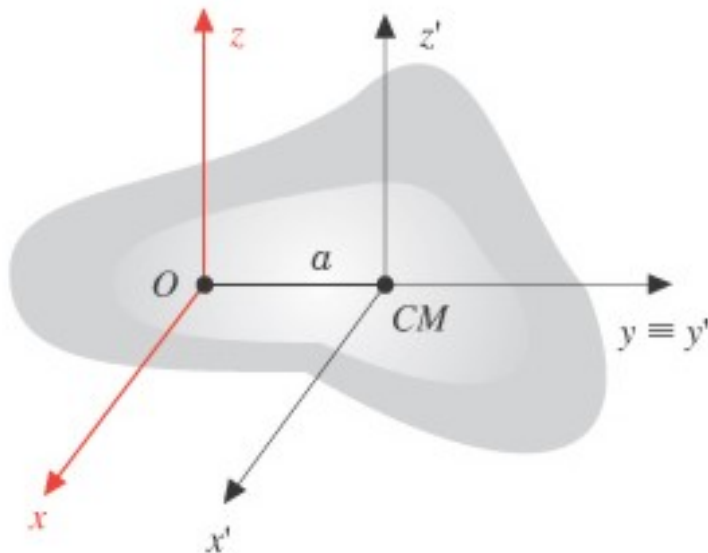
Teorema di Huyghens-Steiner

Nei calcoli del momento di inerzia risulta chiaro come essi siano molto semplici se si scelgono come *assi di rotazione* assi particolari cioè *assi di simmetria passanti per il centro di massa*.

Se si scelgono altri assi e le condizioni di simmetria non vengono soddisfatte, il calcolo degli integrali può divenire complicato

Il teorema di Huyghens-Steiner permette di semplificare il problema affermando che:

Il momento di inerzia di un corpo di massa m rispetto ad un asse che si trova ad una distanza “ a ” dal centro di massa del corpo è dato da:



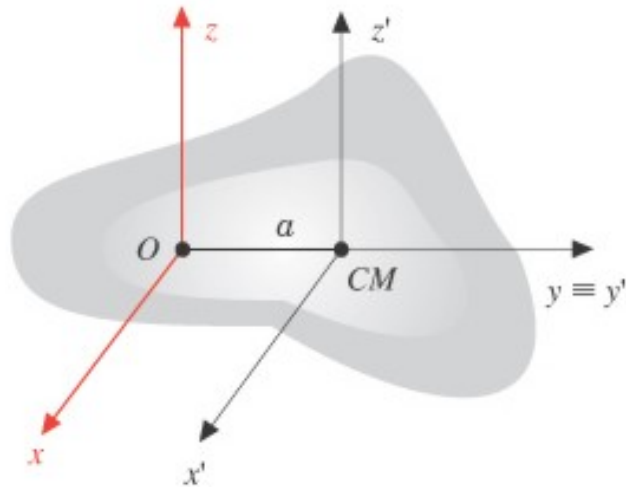
$$I = I_C + ma^2$$

Momento di inerzia

calcolato rispetto all'asse passante per il centro di massa

Teorema di Huyghens-Steiner

dimostrazione



Per dimostrare il teorema di Huyghens-Steiner si considerano due assi z e z' tra loro paralleli distanziati di “ a ”. L’asse z' passa per il centro di massa.

$$x=x' \quad y=y'+a \quad z=z'$$

Calcoliamo il momento d’inerzia rispetto a z

$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i (x_i'^2 + (y_i' + a)^2) = \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + \sum_i m_i a^2 + 2a \sum_i m_i y_i'$$

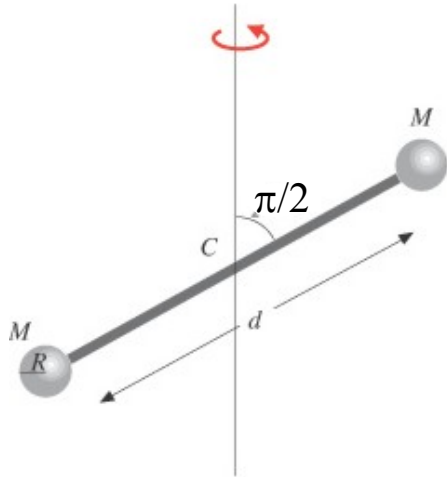
$I_{z'} = I_c$

$= ma^2$

$= y'_{CM} = 0$



$$I_z = I_C + ma^2$$



Esempio – esercizio

Calcolare il momento di inerzia di un sistema costituito da un asta omogenea di **lunghezza d** e **massa m**, con agli estremi due sfere omogenee di **massa M** e **raggio R** rispetto ad un asse passante per il centro C dell'asta e a questa ortogonale

Momento di inerzia di una delle due sfere: I_S

I rispetto ad un diametro $I_{SC} = 2mR^2/5$

Per il teorema di Huyghens-Steiner: $I_S = I_{SC} + Ma^2$

Distanza tra centro asta e centro sfera

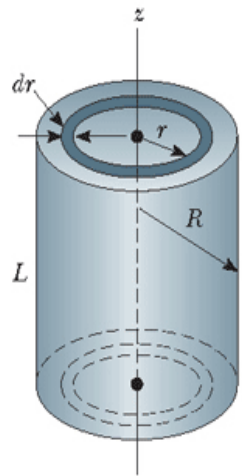
$$I_S = \frac{2}{5}MR^2 + M\left(\frac{d}{2} + R\right)^2$$

Momento di inerzia dell'asta: $I_a: I_a = \frac{1}{12}md^2$

Momento di inerzia totale: $I_T = I_a + 2I_S$



$$I_T = \frac{1}{12}md^2 + 2M\left[\frac{2}{5}R^2 + \left(\frac{d}{2} + R\right)^2\right]$$



Calcolo del momento di inerzia

Determinare il **Momento di inerzia** rispetto al proprio asse di un **cilindro pieno** omogeneo di Massa: **m** Lunghezza: **L** e raggio **R**

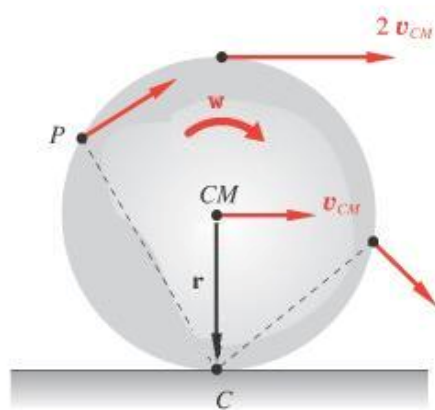
$$m = \rho \pi R^2 L \quad \Rightarrow \quad dm = \rho 2\pi r dr L$$

Elementino di massa dm , che si trova alla distanza r dall'asse

$$I_z = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r L dr = \rho 2\pi L \int_0^R r^3 dr = \rho 2 L \pi \frac{R^4}{4} \Rightarrow I_z = \frac{1}{2} m R^2$$

Se l'asse passa per una generatrice del cilindro uso il teorema di Steiner:

$$I_g = I_z + mR^2 = \frac{1}{2} m R^2 + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2$$



Moto di Rotolamento puro

Un corpo di forma cilindrica o sferica si muove rispetto sopra un piano

Se il corpo rotola sul piano, le velocità dei punti del corpo non sono tutte uguali. *Se il punto di contatto ha velocità nulla rispetto al piano si ha un moto di puro rotolamento*

In ogni intervallo di tempo dt è come se il *corpo ruotasse intorno ad un asse fisso passante per il punto di contatto C, con velocità angolare ω* .



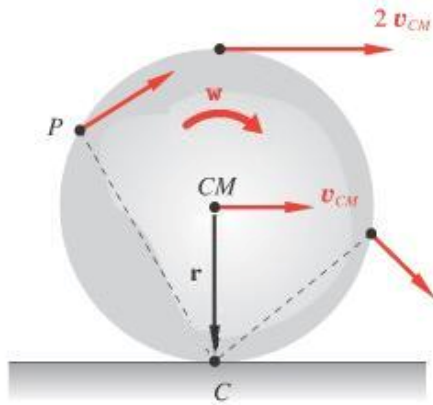
L'asse di rotazione non è un asse materiale, bensì un *asse geometrico che si sposta insieme al corpo*.

In un intervallo di tempo dt successivo il contatto avviene in un C' infinitamente vicino a C e si ripete la rotazione intorno un nuovo asse.

Ma che forza agisce per mantenere fermo il punto C nell'intervallo dt ?

Una forza di attrito statico esercitata tra il piano e il corpo

Moto di Rotolamento puro



Se il corpo ruota attorno ad un asse passante per *il punto di contatto C*, la \mathbf{v} di ogni punto del corpo è ortogonale alla congiungente del punto con C ed è in modulo proporzionale alla distanza da C: $\mathbf{v} = \omega |\mathbf{PC}|$

Dalla formula del teorema delle velocità relative: $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{OO'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$

La velocità di C distante r dal centro di massa può essere espressa come:

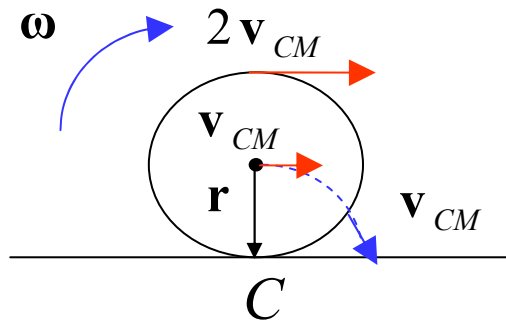
$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

velocità del centro di massa

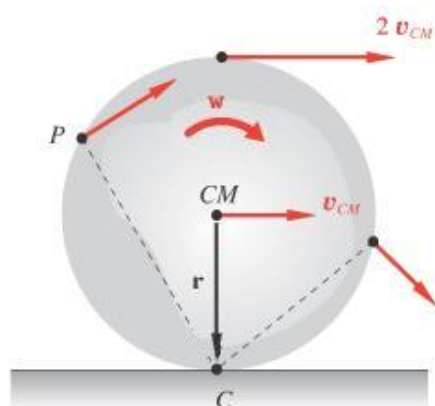
velocità di C rispetto al centro di massa

La condizione di puro rotolamento è: $\mathbf{v}_C = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_{CM} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

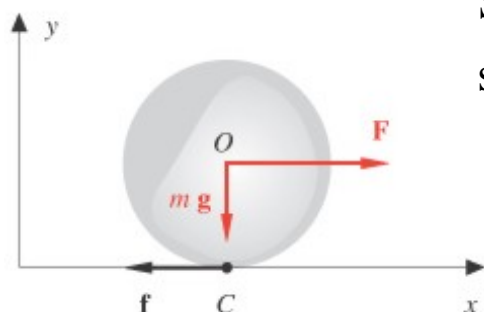
In modulo: $v_{CM} = \omega r \Rightarrow a_{CM} = \alpha r$



Moto di Rotolamento puro



Nel complesso la successione di rotazioni infinitesime attorno ad un punto di contatto istantaneo equivale ad una **roto-traslazione** in cui il *centro di massa avanza con velocità v_{CM} mentre il corpo ruota con velocità angolare ω rispetto al centro di massa*



Si suppone di avere un corpo di massa m e raggio r che rotola senza strisciare **sotto l'azione di una forza F applicata all'asse.**

Forze in gioco:

- **F** : forza applicata all'asse
- **N** : reazione vincolare
- **mg** : forza peso
- **f** : forza di attrito statico

Moto del centro di massa: ***moto di traslazione***

$$\begin{cases} F - f = ma_{CM} & \text{direzione } x \\ N - mg = 0 & \text{direzione } y \end{cases}$$

Moto di rotazione, scegliendo il centro di massa come polo per il calcolo del momento:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = I\alpha \quad \Rightarrow \quad fr = I\alpha = I \frac{a_{CM}}{r}$$

Moto di Rotolamento puro

Dalle relazioni

$$\begin{cases} F - f = ma_{CM} \\ rf = I \frac{a_{CM}}{r} \end{cases} \quad \begin{cases} F - f = ma_{CM} \\ f = \frac{I}{r^2} a_{CM} \end{cases}$$

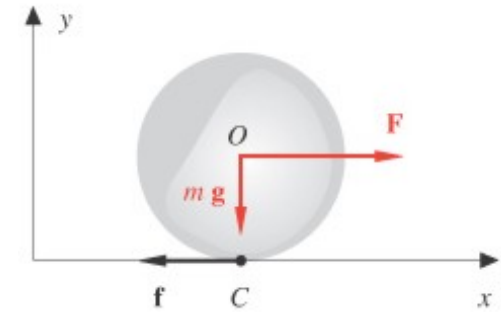


$$F = \left(m + \frac{I}{r^2} \right) a_{CM} \quad a_{CM} = \frac{F}{\left(m + \frac{I}{r^2} \right)} = \frac{F}{m \left(1 + \frac{I}{mr^2} \right)}$$

$$f = \frac{I}{r^2} a_{CM} = \frac{I}{r^2} \frac{F}{m \left(1 + \frac{I}{mr^2} \right)} = \frac{F}{\left(\frac{r^2}{I} m + 1 \right)}$$

$$a_{CM} = \frac{F}{m \left(1 + \frac{I}{mr^2} \right)}$$

$$f = \frac{F}{\left(\frac{r^2}{I} m + 1 \right)}$$



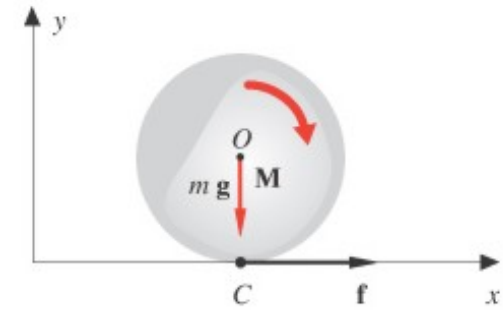
NOTA: La forza di attrito f non può superare la massima forza di attrito statico, ovvero:

$$f \leq \mu_s N \Rightarrow f \leq \mu_s mg \Rightarrow \frac{F}{\left(\frac{r^2}{I} m + 1 \right)} \leq \mu_s mg \quad F \leq \mu_s mg \left(\frac{r^2}{I} m + 1 \right) = F_{lim}$$

Il moto può essere di rotolamento puro solo se la forza applicata non supera il valore limite F_{lim} , altrimenti il corpo rotola e striscia contemporaneamente

Moto di Rotolamento puro

Invece di spingere il corpo, per avere il moto di rotolamento puro, si può applicare all'asse **un momento costante M** (ad esempio tramite un motore).



In questo caso l'azione del momento tende a far slittare verso sinistra il punto di contatto e dunque *la forza di attrito f ha come verso quello del moto*.

$$\begin{cases} f = ma_{\text{CM}} \\ N - mg = 0 \end{cases} \quad \text{e:} \quad \mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{f} = I\boldsymbol{\alpha} \quad \Rightarrow \quad M - fr = I \frac{a_{\text{CM}}}{r}$$

$$a_{\text{CM}} = \frac{M}{mr \left(1 + \frac{I}{mr^2} \right)} \quad f = \frac{M}{r \left(1 + \frac{I}{mr^2} \right)}$$

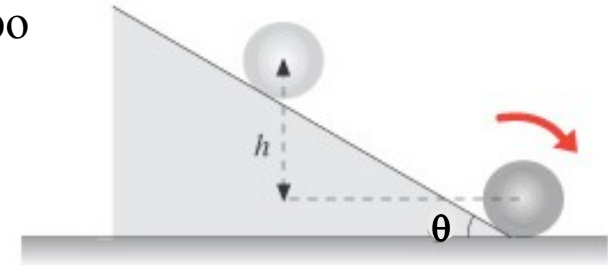
Anche in questo caso la forza di attrito f non può superare la massima forza di attrito:

$$f \leq \mu_s N \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{r \left(1 + \frac{I}{mr^2} \right)} \leq \mu_s mg \quad M \leq \mu_s mgr \left(1 + \frac{I}{mr^2} \right) = M_{\text{lim}}$$

NOTA: *a causa dell'azione di M in questo caso f favorisce il moto, anzi è la forza che causa l'accelerazione del centro di massa. Quando un motore fa girare una ruota, è l'attrito con il suolo che la spinge avanti!*

Esercizio 1 - Moto di Rotolamento puro

Determinare la velocità che raggiunge a fine percorso un corpo rigido che rotola senza strisciare lungo un piano inclinato



Condizioni iniziali: per $t=0$, il corpo è in quiete all'altezza h

Conservazione dell'energia: $mgh = E_{k,fin}$

Si ricordi il teorema di Konig: $E_k = E_{CM} + E'_k$

Utilizzando il teorema di Konig si ottiene: $mgh = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{CM}^2 = \frac{1}{2}mk^2 \frac{v_{CM}^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv_{CM}^2$



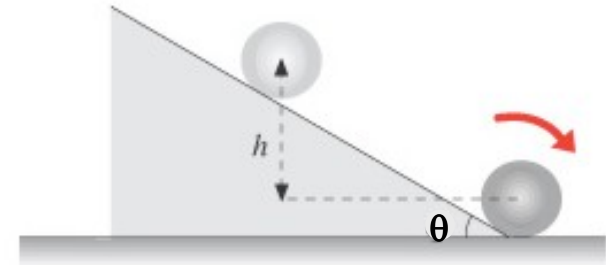
Con k : raggio giratore

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{k^2}{r^2}}} < \sqrt{2gh}$$

Esercizio 1 - Moto di Rotolamento puro - continuazione

Sol.: -continuazione-

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{k^2}{r^2}}} < \sqrt{2gh}$$



NOTA:

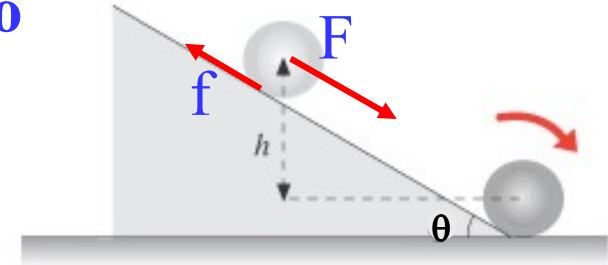
Se il corpo scivolasse senza attrito, arriverebbe in fondo con velocità maggiore: $v_{CM} = \sqrt{2gh}$

Invece se rotola, l'energia potenziale si trasforma **sia** in energia cinetica di traslazione $\frac{1}{2}mv_{CM}^2$
sia in energia cinetica di rotazione nel moto rispetto al centro di massa $\frac{1}{2}I_C\omega^2$

Per questa ragione la velocità finale nel rotolamento risulta **inferiore a** $\sqrt{2gh}$

Esercizio 2 - Moto di Rotolamento puro

Determinare l'angolo di inclinazione massimo per avere un moto di puro rotolamento



L'accelerazione e la forza di attrito statico si ottengono dalle equazioni già viste:

Dove in questo caso $F = mg \cdot \sin\theta$

$$F - f = ma_{CM}$$

$$fr = I_C \alpha = I_C \frac{a_{CM}}{r}$$

$$mg \cdot \sin\theta - f = ma_{CM}$$

$$fr = I_C \alpha = mk^2 \frac{a_{CM}}{r}$$

$$a_{CM} = \frac{g \cdot \sin\theta}{1 + \frac{k^2}{r^2}}$$

$$f = \frac{mg \cdot \sin\theta}{\left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right)}$$

Condizione: $f \leq \mu_s N$

$$\Rightarrow f \leq \mu_s mg \cdot \cos\theta \Rightarrow f = \frac{mg \cdot \sin\theta}{\left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right)} \leq \mu_s mg \cdot \cos\theta \Rightarrow \tan\theta \leq \mu_s \left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right)$$

A. Romer Angolo di inclinazione massimo: $\theta_M = \arctg \left[\mu_s \left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right) \right]$

Attrito volvente

Al moto di puro rotolamento sotto l'azione di forze conservative, come lo sono le forze costanti e in particolare la forza peso, **si può applicare la legge di conservazione dell'energia meccanica**. Infatti **la forza di attrito** agisce su un punto fermo, per cui lo spostamento è nullo ed è quindi **nullo il lavoro**.

Sperimentalmente si osserva che un corpo che rotola senza strisciare su un piano orizzontale, in assenza di forze o di momenti applicati, si arresta dopo un certo tempo.



Deve esistere un'altra forma di attrito (**attrito volvente o di rotolamento**), che viene attribuito alla deformazione locale del piano e può essere rappresentato con l'azione di un momento:

$$M_v = hmg \quad \text{Con } h: \text{coefficiente di attrito volvente [m]}$$

Per vincere il momento dovuto all'azione dell'attrito volvente si deve applicare al corpo di forma circolare una forza di trazione:

$$F_2 \geq \frac{hmg}{r}$$

Per spostare cilindro di $m=10^3$ Kg se striscia

$$F = \mu_s mg = 0,2 \cdot 1000 \cdot 9,8 = 1960 \text{ N}$$

Se rotola e ha $r=0,2$ m

$$F = \frac{hmg}{r} = \frac{5 \cdot 10^{-5} 10^3 \cdot 9,8}{0,2} = 2,5 \text{ N}$$

Impulso angolare

Abbiamo già visto il *Teorema dell'impulso*: l'impulso di una forza applicata ad un punto materiale è uguale alla variazione della sua quantità di moto

$$\mathbf{J} = \int_0^t \mathbf{F} dt = \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} d\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \Delta \mathbf{p}$$

Una deduzione analoga si può fare a partire dalla relazione: $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(E)}$

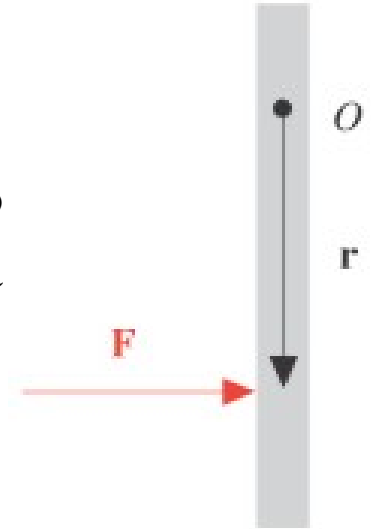
$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt = \mathbf{L}(t_2) - \mathbf{L}(t_1) = \Delta \mathbf{L}$$

Impulso angolare

L'azione di un momento durante un intervallo finito di tempo causa una variazione finita del momento angolare.

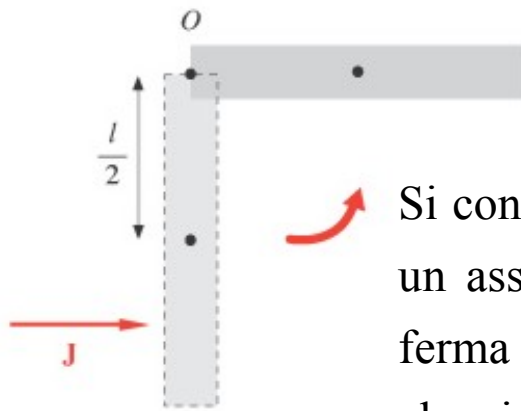
Impulso angolare

Un modo per metter in rotazione un corpo rigido rispetto ad un asse fisso consiste nell'applicazione, in un punto determinato del corpo, di una forza intensa per un tempo breve, ovvero nell'applicazione di un impulso



$$\int \mathbf{M} dt = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) dt = \mathbf{r} \times \int \mathbf{F} dt = \mathbf{r} \times \mathbf{J} = \Delta \mathbf{L}$$

La grandezza $\mathbf{r} \times \mathbf{J}$ si chiama **momento dell'impulso**



Esercizio 1- Momento dell'impulso

Si consideri un'asta di massa m e di lunghezza l libera di ruotare attorno ad un asse orizzontale, passante per un suo estremo O . Inizialmente l'asta è ferma in posizione verticale. Si determini l'impulso \mathbf{J} , ortogonale all'asta, che si deve applicare alla distanza $r < l$ da O per far compiere all'asta una rotazione di 90°

Sol.:

Momento dell'impulso rispetto a O : $\mathbf{r} \times \mathbf{J}$ il suo modulo: $rJ \sin 90^\circ = rJ$

$$L_{\text{in}} = 0$$

Dalla relazione vista: $\mathbf{r} \times \mathbf{J} = \Delta \mathbf{L}$

$$L_{\text{fin}} = I\omega$$



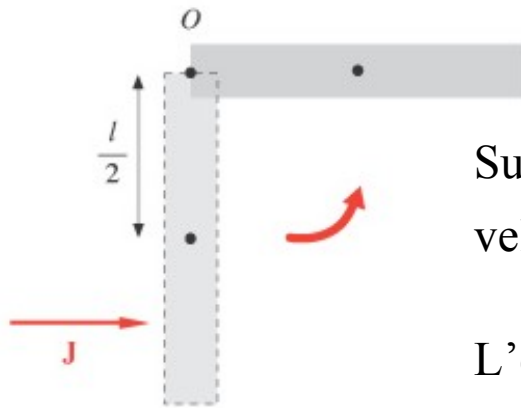
Si ottiene: $rJ = \Delta L = I\omega$

Con I : momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse passante per O : $I = \frac{1}{3}ml^2$



$$rJ = \frac{1}{3}ml^2\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{3rJ}{ml^2}$$

Esercizio 1- Momento dell'impulso



Sol.: -continuazione -

Subito dopo l'applicazione dell'impulso l'asta inizia a ruotare con velocità angolare ω : $\omega = \frac{3rJ}{ml^2}$

L'energia cinetica iniziale vale dunque: $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$

Dopo la rotazione di 90° , il centro di massa si è sollevato di $l/2$, per cui l'energia potenziale dell'asta è aumentata di $mg l/2$

Per la conservazione dell'energia si ha :

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{l}{2}mg$$



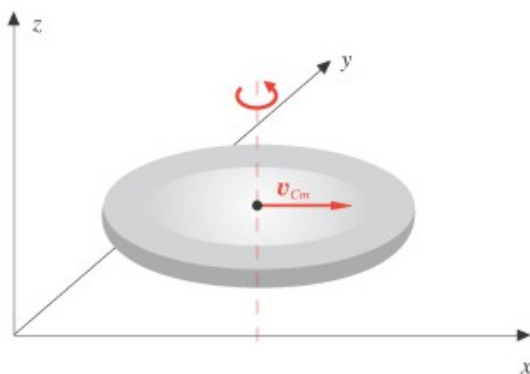
$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \cancel{ml} \right) \left(\frac{3rJ}{ml^2} \right)^2 = \frac{l}{2} \cancel{mg}$$

$$\Rightarrow J = \frac{m}{r} \sqrt{\frac{gl^3}{3}}$$

Leggi di conservazione nel moto di un corpo rigido

Riprendiamo considerazioni già fatte sulle leggi di conservazione adattandole alle caratteristiche dei moti dei corpi rigidi

Conservazione della quantità di moto del sistema: $\mathbf{P} = m\mathbf{v}_{CM}$. *Se la risultante delle forze esterne è nulla, il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme, ma non è detto che il moto dei singoli punti del corpo sia rettilineo uniforme.*



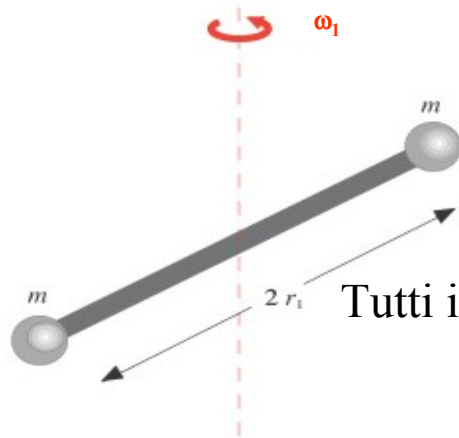
Esempi: un punto di un corpo che compie un moto di puro rotolamento uniforme, oppure un punto di un disco, posto su un piano orizzontale senza attrito, che ruota intorno ad un asse verticale passante per il centro di massa, e contemporaneamente si muove nel piano con $v_{CM} = \text{costante}$

Conservazione del momento angolare: Se $M=0$, *il momento angolare resta costante* in direzione, modulo e verso

Conservazione di L in un sistema di più corpi

2 sferette di massa m e raggio r , sono collegate da un asta di lunghezza variabile e di momento di inerzia trascurabile.

Caso: **sistema formato da più corpi rigidi**: la variazione della posizione relativa delle singole parti determina una variazione del momento di inerzia del sistema.



Condizioni iniziali:

Distanza iniziale delle due sferette: $2r_1 \gg r$

Velocità angolare costante: ω_1

Tutti i momenti esterni rispetto al CM siano nulli $\mathbf{M}=0$

$$\Rightarrow L_1 = I_1 \omega_1 = \text{cost}$$

$$I_1 = 2 \left[\frac{2}{5} m r^2 + m (r + r_1)^2 \right] \cong 2 m r_1^2$$

Avviciniamo le sferette ad una

distanza da $2r_1$ a $2r_2$ con $r_2 < r_1$.

$$\Rightarrow I_2 = 2 m r_2^2 < I_1$$

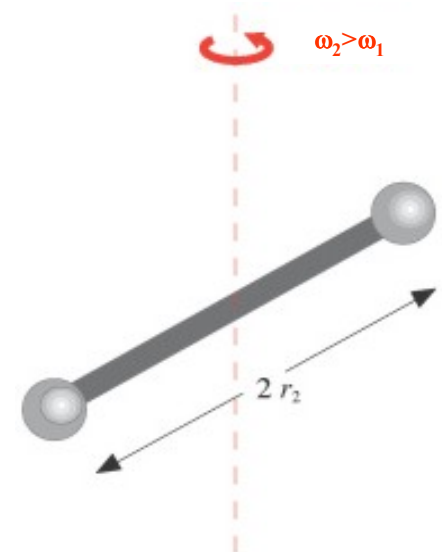
L si conserva $\Rightarrow L_2 = L_1 \Rightarrow I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 \Rightarrow 2 m r_1^2 \omega_1 = 2 m r_2^2 \omega_2$

$$\omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} \omega_1 \Rightarrow > \omega_1$$

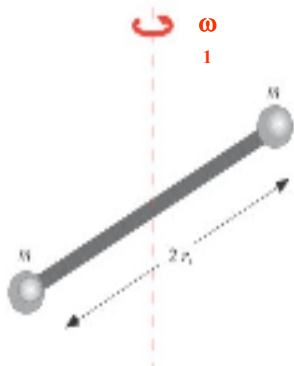
$$\omega_2 > \omega_1$$

In generale

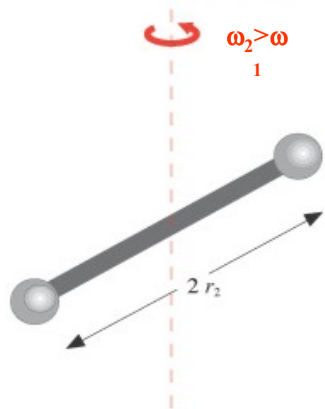
$$\omega = \frac{r_1^2}{r^2} \omega_1$$



Momento angolare ed energia



Nel caso visto, anche se L è costante, la variazione del momento di inerzia porta ad una variazione della velocità angolare

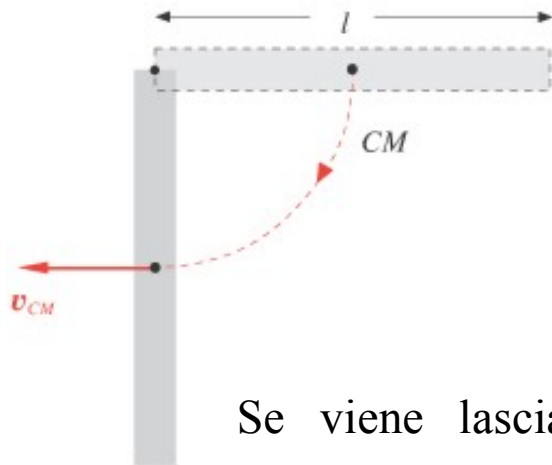


Questo dimostra: *l'indipendenza della legge di conservazione del momento angolare da quella dell'energia*

Nel sistema esaminato L si conserva, però a diverse configurazioni con lo stesso momento angolare corrispondono energie diverse: *l'energia non si conserva*

C'è una variazione di energia cinetica uguale al lavoro delle forze centripete che può essere espressa come segue:

$$W = \Delta E_k = E_{k,fin} - E_{k,in} = \frac{L_{fin}^2}{2I_{fin}} - \frac{L_{in}^2}{2I_{in}}$$



Esempio

Un asta di massa m e di lunghezza l può ruotare in un piano verticale attorno al suo estremo.

Se viene lasciata cadere, con velocità iniziale nulla dalla posizione orizzontale, quando raggiunge la posizione verticale ha una velocità angolare ω e il suo centro di massa ha velocità v_{CM}

ω e v_{CM} si possono calcolare imponendo la conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{in} = mgl$$

$$E_{fin} = \frac{1}{2}I\omega^2 + mg\frac{l}{2}$$



$$E_{in} = E_{fin}$$



$$\frac{1}{2}I\omega^2 + mg\frac{l}{2} = mgl$$

$$\text{Con } I: I = \frac{1}{3}ml^2$$



$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{3gl}{4}}$$

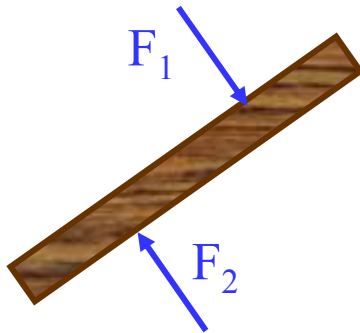
$$v_{CM} = \omega\frac{l}{2}$$

Equilibrio statico di un corpo rigido

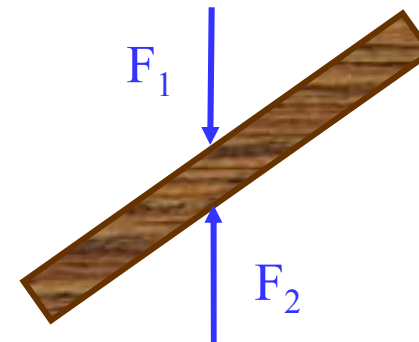
Per **un punto materiale** si ha una condizione di equilibrio statico, (cioè se è in quiete rimane in quiete) se la forza risultante **R** che agisce su di esso è nulla. $\mathbf{R}=0$

Nel caso di **un corpo rigido**, per esempio una bacchetta, la condizione che la **forza risultante sia nulla è necessaria, ma non sufficiente.**

Infatti il corpo può ruotare anche se forza risultante che agisce su di esso è nulla.



(a) Le due forze F_1 e F_2 sono uguali ed opposte, ma la bacchetta **non è in equilibrio statico**, perché queste forze tendono a farla ruotare in senso orario (**M** coppia)



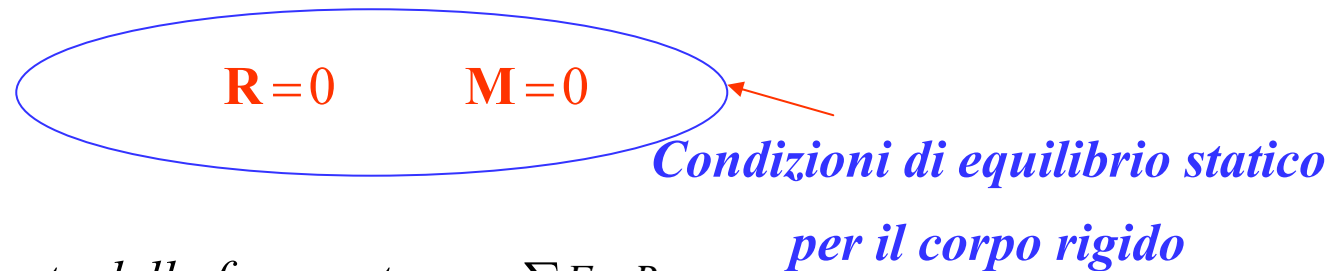
(b) In questo caso, le due forze hanno la stessa retta d'azione e quindi non provocano la rotazione della bacchetta
 $\mathbf{M}=0$

Equilibrio statico di un corpo rigido

Per i corpi estesi, oltre al modulo e alla direzione della forza, è naturalmente importante anche il **punto di applicazione**.

Ovvero per il corpo rigido è importante *il momento esercitato dalla forza*

Per un corpo rigido inizialmente in quiete si ha equilibrio statico se


$$\mathbf{R} = 0 \quad \mathbf{M} = 0$$

*Condizioni di equilibrio statico
per il corpo rigido*

Dove R è la risultante delle forze esterne: $\sum F = R$

Con $\mathbf{R}=0$ si realizza l'equilibrio statico del centro di massa $\Rightarrow v_{CM} = 0$

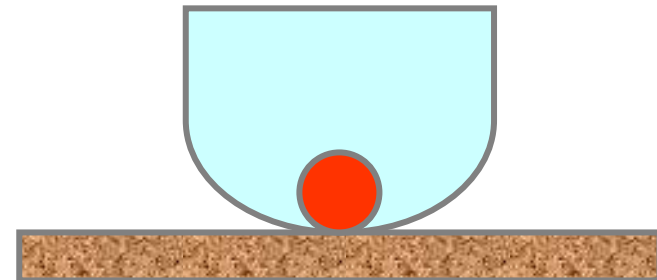
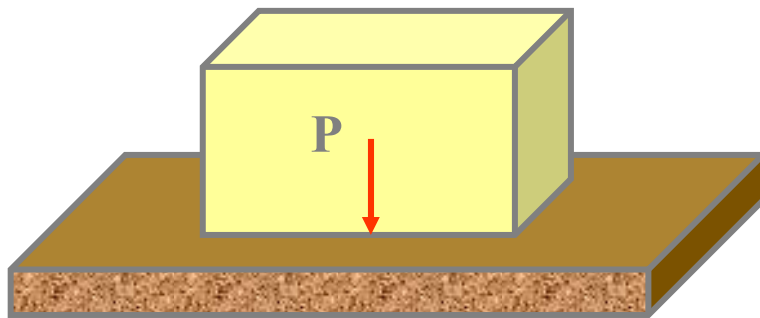
Con $\mathbf{M}=0$ non si ha moto rotatorio $\Rightarrow \omega = 0$

NOTA: si ricorda che se $\mathbf{R}=0$, \mathbf{M} è indipendente dal polo, quindi se è nullo rispetto ad un polo, lo è rispetto a qualsiasi altro

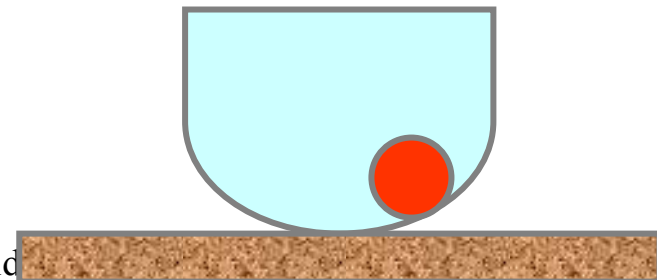
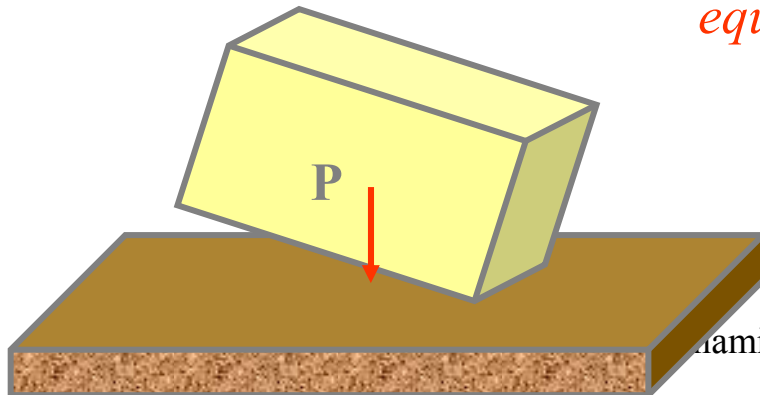
La condizione di equilibrio di un corpo può essere di tre tipi:
stabile, instabile o indifferente.

Equilibrio stabile

L'equilibrio stabile si ha se le forze o i momenti di forza risultanti che insorgono a causa di un **piccolo spostamento** del corpo spingono il corpo indietro verso la sua **posizione di equilibrio**.



equilibrio stabile

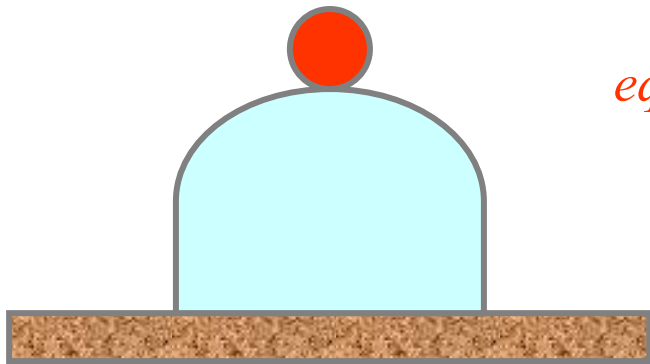


meccanica V - Corpo rigido

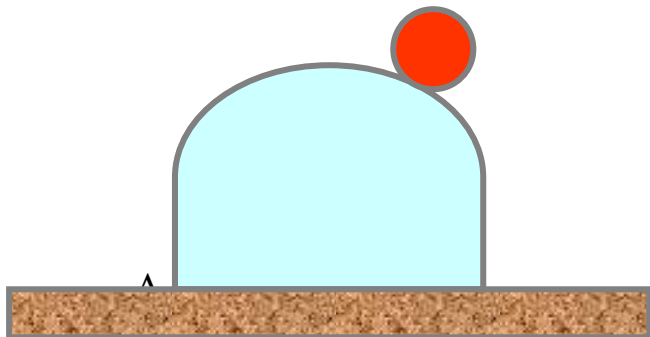
Equilibrio instabile e indifferente

L'**equilibrio instabile** si ha se le forze o i momenti di forza che insorgono a causa di un **piccolo spostamento** del corpo lo spingono **lontano dalla sua posizione iniziale**.

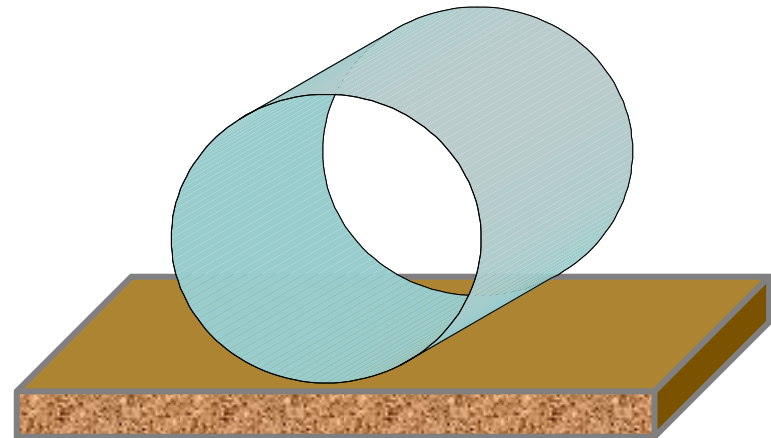
L'**equilibrio indifferente** si ha quando, in seguito ad un **piccolo spostamento** del corpo, non vi sono forze o momenti di forza risultanti che tendano a riportarlo verso la sua posizione iniziale o ad allontanarlo da essa.



equilibrio instabile



*equilibrio
indifferente*



Equilibrio: il problema della scala

Una scala uniforme di 5 m pesa 12 N ed è poggiata contro una parete verticale priva di attrito. Il piede della scala si trova a 3 m dalla parete. Qual è il minimo coefficiente di attrito tra la scala e il pavimento che impedisca alla scala di slittare?

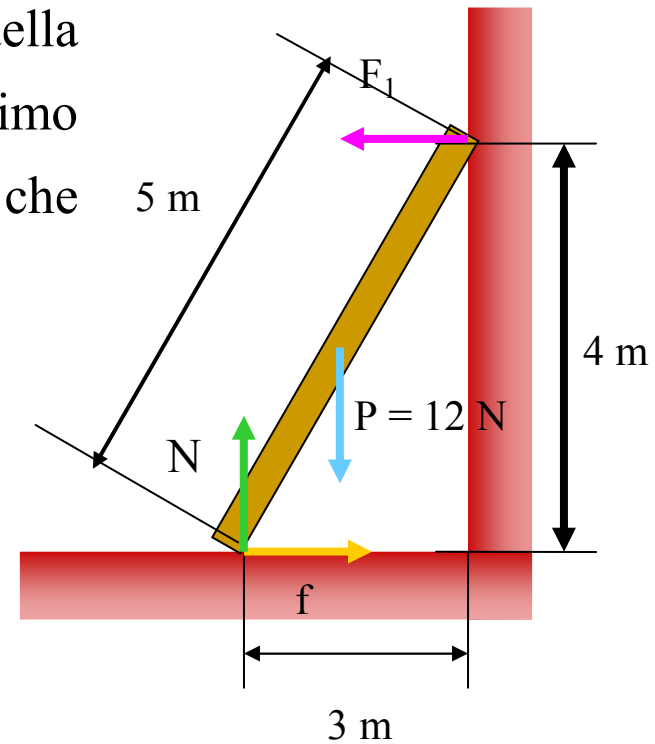
Quali sono le forze in gioco?

La forza di gravità P

La forza F_1 esercitata orizzontalmente dalla parete

La forza esercitata dal pavimento N

La forza di attrito f

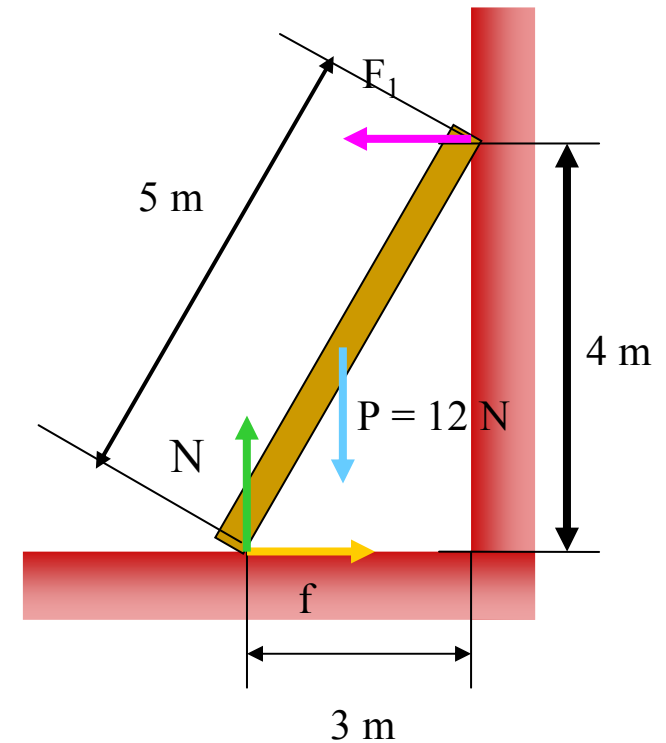


Il problema della scala - continuazione

Condizione di equilibrio: $\sum \mathbf{F} = 0$

$$N = P = 12 \text{ N}$$

$$F_1 = f$$



Poiché non conosciamo né f né F_1 , dobbiamo usare la seconda condizione di equilibrio e calcolare i momenti delle forze rispetto ad un punto conveniente.

Il problema della scala - continuazione

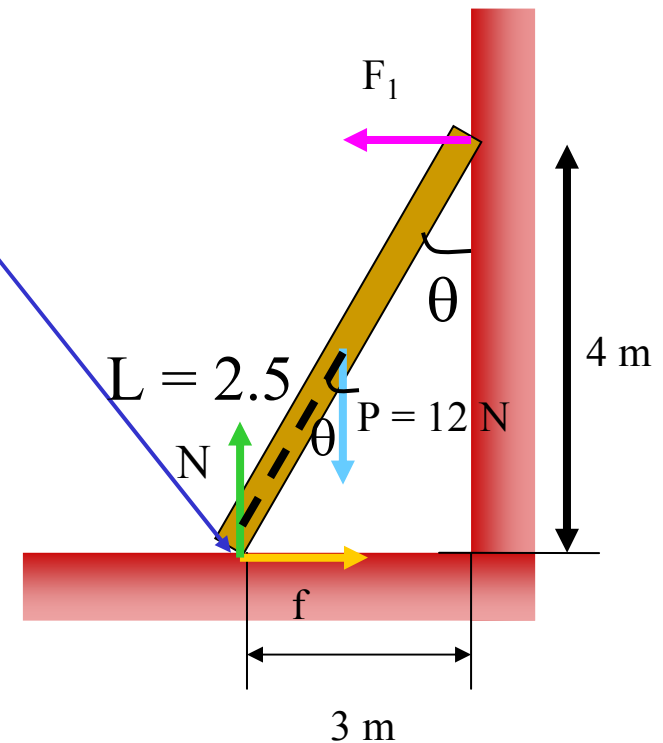
M=0 Scegliamo il punto di contatto tra la scala e il pavimento come polo perché N e f sono entrambe applicate a questo punto quindi il loro momento è nullo

Il momento dalla forza di gravità è negativo (verso entrante) ed il suo modulo è dato da:

$$P \cdot L \cdot \sin \theta = 12 \cdot 2.5 \cdot 3/5 = 18 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Il momento esercitato da F_1 **positivo** con il modulo:

$$F_1 \cdot 2L \cdot \sin(90^\circ - \theta) = F_1 \cdot 2L \cdot \cos \theta = F_1 \cdot 5 \cdot 4/5 = F_1 \cdot 4 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Il problema della scala - continuazione

Da $\mathbf{M}=0$ otteniamo:

$$-18 \text{ Nm} + F_1 \cdot 4 \text{ m} = 0$$



$$F_1 = 4.5 \text{ N}$$

F_1 deve essere uguale al modulo della forza di attrito.

$$F_1 = f \quad \Rightarrow \quad f = 4.5 \text{ N}$$

Poiché la forza di attrito è legata alla forza normale dalla relazione

$$f \leq \mu_s N$$

si ha $\mu_s \geq f / N = 4.5 / 12 = 0.375$ dove μ_s è il coefficiente di attrito statico.

Il minimo coefficiente di attrito tra la scala e il pavimento è:

$$\mu_s = 0.375$$

